

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВАРИАЦИИ АЛЛАНА И ЕЕ МОДИФИКАЦИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Малкин З.М.

Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН, Санкт-Петербург, Россия

Вариация Аллана (ВА), предложенная более 40 лет назад для описания нестабильности стандартов частоты, в последние годы стала активно использоваться для исследования различных временных рядов в астрометрии и геодинимике. Этот метод позволяет эффективно выделять шумовую компоненту таких данных, как вариации положения станций и координат радиостанций. Более того, ВА может быть использована для изучения спектрального состава этой шумовой составляющей. Для обработки неравноточных и многомерных наблюдений, которые характерны для многих астрономических и геодезических приложений, предложены соответствующие модификации ВА. В работе описывается опыт применения классической и модифицированной ВА в астрометрии и геодинимике.

1. Введение

Вариация Аллана (ВА) является специализированной статистикой, разработанной в 1960-х годах для исследования стандартов частоты. В последние годы она стала также активно использоваться для исследования различных временных рядов в астрометрии и геодинимике. Однако применение ВА в ее оригинальном виде в астрометрии и геодинимике ограничено двумя факторами. Во-первых, она не позволяет обрабатывать неравноточные наблюдения, которые характерны для многих реальных наблюдательных данных. Во-вторых, в ряде случаев бывает целесообразно обрабатывать многомерные данные, такие как координаты станций, небесных объектов или параметров вращения Земли. В работе описывается опыт применения классической ВА в астрометрии и геодинимике, а также предлагаются модификации этого метода для многомерных и неравноточных временных рядов.

Полный вариант работы опубликован в статье (Малкин, 2009), которая рекомендуется для ссылок на это исследование.

2. Основные определения и свойства ВА

ВА была предложена Дэвидом Алланом (Allan 1966) как оценка стабильности стандартов частоты. В классическом виде ВА вводится следующим образом. Пусть мы имеем серию измерений y_1, y_2, \dots, y_n , выполненных в последовательный моменты времени. Тогда ВА определяется как

$$\sigma^2 = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (y_i - y_{i+1})^2. \quad (1)$$

Два важных замечания могут быть сделаны в отношении ВА. Первое, ВА не связана с какой-либо физической моделью стандарта частоты, а использует только эмпирические данные – измерения. Таким образом, нет никаких теоретических ограничений на применение этой статистики для других типов измеряемых величин. Второе, ВА позволяет описывать поведение стандарта частоты на различных интервалах усреднения, начиная от периода, равного интервалу между отсчетами. Для этого достаточно рассматривать величины y_i как обобщенные измерения, представляющие собой средние значения реальных измерений за определенный период времени (период усреднения). Чтобы подчеркнуть это свойство ВА, ее часто обозначают как $\sigma^2(\tau)$, где τ – период

усреднения. Оба этих свойства могут быть использованы для применения ВА для исследования различных рядов измерений, в том числе в астрономии и геодинатике.

Однако ВА в своем классическом виде (1) не всегда может удовлетворительно описать астрономические и геодезические измерения. Причина этого заключается в том, что эти измерения часто не являются равноточными, и это обстоятельство никак не учитывается в (1). Для преодоления этого ограничения автор (Malkin 2008) предложил модификацию ВА для неравноточных измерений. Вводится она следующим образом. Пусть мы имеем серию измерений y_1, y_2, \dots, y_n с соответствующими ошибками s_1, s_2, \dots, s_n . Тогда мы можем определить:

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{2p} \sum_{i=1}^{n-1} p_i (y_i - y_{i+1})^2, \quad p = \sum_{i=1}^{n-1} p_i, \quad p_i = (s_i^2 + s_{i+1}^2)^{-1}. \quad (2)$$

Однако и это определение имеет некоторые ограничения в тех случаях, когда измеряемые величины, будучи формально одномерными, физически являются многомерными. К величинам такого типа можно отнести, например, координаты полюса Земли, где независимо определяемые составляющие Xp и Yp являются, по сути, компонентами одной двумерной величины – вектора положения полюса на касательной плоскости. Другой пример, три декартовы координаты станции X, Y и Z являются трехмерными координатами точки в геоцентрической системе. Для обработки таких данных в (Malkin 2008) была предложена модификация ВА для многомерных и неравноточных измерений. Она определяется следующим образом. Пусть мы имеем серию k -мерных измерений $y_i = (y_i^1, y_i^2, \dots, y_i^k)$, $i = 1, \dots, n$, с соответствующими ошибками $s_i = (s_i^1, s_i^2, \dots, s_i^k)$. Тогда мы можем ввести следующую оценку ВА:

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{2p} \sum_{i=1}^{n-1} p_i d_i^2, \quad d_i = |y_i - y_{i+1}|, \quad p = \sum_{i=1}^{n-1} p_i, \quad (3)$$

где $| \cdot |$ означает евклидову норму вектора d_i , представляющую собой расстояние между измеренными величинами в k -мерном пространстве. Вообще говоря, вес p_i должен вычисляться на основе закона распространения ошибки как

$$p_i = \left(\sum_{j=1}^k \left\{ \left[(y_i^j - y_{i+1}^j) / d_i \right]^2 \left[(s_i^j)^2 + (s_{i+1}^j)^2 \right] \right\} \right)^{-1}. \quad (4)$$

Однако, эта формула имеет сингулярность при d_i равном нулю, что может быть при наличии двух равных (или очень близких) последовательных измерений. После ряда экспериментов было принято упрощенное эмпирическое выражение

$$p_i = \left(\sum_{j=1}^k \left[(s_i^j)^2 + (s_{i+1}^j)^2 \right] \right)^{-1}. \quad (5)$$

Тестовые результаты обработки различных рядов измерений показали практическую эквивалентность применения (4) и (5).

ВА является характеристикой шумовой составляющей измеряемого сигнала. Теоретический анализ и результаты практического применения позволяют выявить ее основные отличия от других оценок шумовой составляющей, в первую очередь, от наиболее широко применяемой дисперсии. Легко видеть, что значение ВА, в отличие от дисперсии, практически не зависит от долгопериодических вариаций и трендов в изучаемом процессе, и даже от скачкообразных изменений в измеряемой величине (при числе скачков намного меньшем числа измерений). Если первое можно считать преимуществом ВА, которое позволяет нам избежать не всегда очевидной процедуры уда-

ления трендов и долгопериодических составляющих при оценке дисперсии, то второе может быть и недостатком, маскирующим важные свойства изучаемого процесса.

Фейссель и др. [4, 9] рекомендуют также использовать ВА для изучения спектральных свойств шума в исследуемом сигнале в предположении, что его спектральная плотность может быть описана степенной зависимостью. Для этого нужно вычислить ВА для различных интервалов усреднения τ и определить коэффициент μ линейной регрессии:

$$\log(\sigma^2(\tau)) = \mu \cdot \log(\tau) + b \quad (6)$$

Тогда тип шума, присутствующего в серии измерений может быть определен следующим образом:

$$\mu = \frac{\log(\sigma^2(\tau))}{\log(\tau)} = \begin{cases} < 0 & \text{– белый шум (white noise)} \\ 0 & \text{– фликкер-шум (flicker noise)} \\ > 0 & \text{– случайные блуждания (random walk)} \end{cases} \quad (6)$$

3. Примеры применения ВА

В последние годы ВА активно используется в различных астрономических и гео-динамических научных исследованиях и практических приложениях таких, как определение параметров вращения Земли (ПВЗ), вариации координат станций и радиостанций и др.

Приведем два примера использования ВА при анализе ПВЗ. В течение нескольких лет ВА использовалась в Международной службе вращения Земли и опорных систем координат (IERS) в процедуре вычисления комбинированного ряда ПВЗ. С помощью ВА, вычисляемой для разностей исходных рядов ПВЗ на различных временах усреднения, оценивалось качество этих рядов и производилось их взвешивание (Gambis 2002). Malkin (2008) применил ВА для оценки шумовой составляющей рядов нутации, вычисленных по РСДБ-наблюдениям с применением разных каталогов координат радиостанций. Это позволило провести оценку качества этих каталогов.

Несколько авторов успешно использовали ВА для анализа рядов координат станций и связанных величин. Malkin и Voinov (2001) применили ВА для оценки случайных вариаций координат станций Европейской GPS-сети EUREF, полученных с разными методами обработки, что позволило сравнить качество этих методов. Roberts и др. (2002) использовали вариацию Аллана для оценки случайной ошибки рядов длин баз. Затем эта оценка была использована как критерий значимости наблюдаемых изменений в длинах баз, вызванных деформациями земной коры вследствие вулканической деятельности.

В работах Le Bail и Feissel-Vernier (2003), Le Bail (2006), Feissel-Vernier и др. (2006, 2007) накоплен богатый опыт комплексного применения ВА для изучения вариаций координат станций VLBI, SLR, GPS и DORIS. Их анализ включает также оценку спектрального типа шумовой составляющей в изменениях координат, изучение движения геоцентра и геофизическую интерпретацию полученных результатов.

В работах Feissel (2000), Feissel-Vernier (2003), Malkin (2009) ВА используется для анализа рядов координат радиостанций с целью выбора опорных источников для новой реализации ICRF.

4. Заключение

ВА является перспективной статистикой для исследования временных рядов наблюдательных данных. Будучи использованной в дополнение к другим традиционно

применяемым статистикам, она позволяет получать дополнительные данные о шумовой компоненте изучаемых сигналов, практически не зависящие от наличия долгопериодических составляющих и трендов в изучаемом явлении. ВА также позволяет изучать спектральные свойства шумовой составляющей. Для изучения неравноточных и многомерных рядов данных, характерных для многих практических приложений, могут быть использованы предложенные автором модификации классической ВА.

Литература

1. *Малкин З.М.* Исследование астрономических и геодезических рядов с помощью вариации Аллана. Кинемат. физ. неб. тел, 2009, в печати.
2. *Allan D.W.* Statistics of Atomic Frequency Standards. Proc. IEEE, 1966, v. 54, No. 2, 221-230.
3. *Feissel-Vernier M.* Selecting stable extragalactic compact radio sources from the permanent astrogeodetic VLBI program. Astron. Astrophys., 2003, v. 403, 105-110.
4. *Feissel M., Gontier A.-M., Eubanks T.M.* Spatial variability of compact extragalactic radio-sources. Astron. Astrophys, 2000, v. 359, 1201-1204.
5. *Feissel-Vernier M., Le Bail K., Berio P., et al.* Geocentre motion measured with DORIS and SLR, and predicted by geophysical models. J. of Geodesy, 2006, v. 80, No. 8-11, 637-648.
6. *Feissel-Vernier M., de Viron O., Le Bail K.* Stability of VLBI, SLR, DORIS, and GPS positioning. Earth Planets Space, 2007, v. 59, 475-497.
7. *Gambis D.* Allan Variance in earth rotation time series analysis. Advances in Space Research, 2002, v. 30, No. 2, 207-212.
8. *Le Bail K.* Estimating the noise in space-geodetic positioning: the case of DORIS. J. of Geodesy, 2006, v. 80, No. 8-11, 541-565.
9. *Le Bail K., Feissel-Vernier M.* Time series statistics of the DORIS and GPS collocated observations. EGS-AGU-EUG Joint Assembly, Nice, April 2003.
10. *Malkin Z. M., Voinov A. V.* Preliminary Results of Processing EUREF Network Observations Using a Non-Fiducial Strategy. Phys. Chem. Earth (A), 2001, v. 26, No. 6-8, 579-583.
11. *Malkin Z.* On the accuracy assessment of celestial reference frame realizations. J. of Geodesy, 2008, v. 82, No. 6, 325-329.
12. *Malkin Z.* Some Results of Analysis of Source Position Time Series. IVS Memorandum 2009-001v01, <ftp://ivscc.gsfc.nasa.gov/pub/memos/ivs-2009-001v01.pdf>
13. *Roberts C.A., Morgan P., Rizos C.* Allan variance applied to time series baseline results for GPS-based deformation monitoring applications. In: 2nd Symposium on Geodesy for Geotechnical and Structural Applications, Berlin, Germany, 21-24 May, 2002, 299-311.

APPLICATIONS OF ALLAN VARIANCE AND ITS MODIFICATIONS TO INVESTIGATIONS OF TIME SERIES

Malkin Z.M.

Main (Pulkovo) Astronomical Observatory of RAS

Allan variance estimator was proposed more than 40 years ago for estimation of the frequency standards stability, and during last years it is often used in astronomy and geodynamics for investigation of time series. This technique allows one to effectively evaluate the noise in station and source position variations. Moreover, Allan variance method can be used to classify a time series into one of the standard noise types. Allan variance modifications are proposed for analysis of unequally weighted and multidimensional measurements, which are quite usual for astronomy and geodesy application. In this paper, an experience of using of classic and modified Allan variance analysis for processing of astronomical and geodynamical data is considered.