

## ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СЛУЧАЙНЫХ ОШИБОК КАТАЛОГОВ КООРДИНАТ РАДИОИСТОЧНИКОВ

Малкин З.М.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН, Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup>Астрономический институт им. В.В. Соболева СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия

*Оценка случайных ошибок каталогов важна для многих задач, таких как оценка качества каталогов и вычисление весов при составлении сводных каталогов. Внутренние ошибки координат, приводимые авторами каталогов, нередко бывают существенно заниженными по сравнению с их реальной точностью. Кроме того, эти ошибки вычисляются разными авторами разными методами, что затрудняет сопоставление точности каталогов, которое необходимо, например, для их статистически обоснованного взвешивания. Поэтому астрометристы стремятся к разработке более объективных методов оценки случайных ошибок каталогов. Один из распространенных методов решения этой задачи основывается на анализе попарных разностей каталогов с помощью соотношения  $\sigma_{ij}^2 = \sigma_i^2 + \sigma_j^2 - 2\sigma_i\sigma_j r_{ij}$ , где  $\sigma_i$  и  $\sigma_j$  – искомые среднеквадратические ошибки координат источников в двух каталогах,  $\sigma_{ij}$  – среднеквадратическая ошибка разностей координат источников в этих каталогах,  $r_{ij}$  – коэффициент корреляции между ошибками каталогов. Имея три каталога и, соответственно три приведенных разностных уравнения, мы можем их решить относительно ошибок сравниваемых каталогов. Этот метод обеспечивает теоретически правильный результат для трех сравниваемых каталогов с некоррелированными ошибками ( $r_{ij}=0$ ), чего, обычно, не бывает на практике. Поэтому необходимо уметь оценивать корреляции между ошибками каталогов. Важно также обобщить метод для произвольного числа каталогов, больше трех. В настоящей работе мы рассмотрели один из возможных методов решения этой задачи.*

### Введение

При сравнении каталогов координат звезд или радиоисточников и построении из сводных каталогов большое значение имеет корректная оценка случайных ошибок каждого каталога. Проблема заключается в том, что мы в этом случае можем вычислить только статистику *разностей* координат в разных каталогах, и полученные оценки дисперсии и другие статистические оценки будут зависеть от ошибок обоих каталогов. Такие задачи приходится решать не только в астрометрии. Наверное, наиболее распространенным примером может служить определение нестабильности стандартов частоты на основе изучения разностных сигналов между ними. Для последнего случая и был впервые предложен так называемый "Three-cornered hat" (ЗСН) метод [1]. Он получил впоследствии широкое распространение при исследовании шумовых характеристик различных сигналов в различных областях науки и техники, в том числе и в астрометрии для исследования, например, рядов параметров вращения Земли и каталогов координат радиоисточников.

Однако, несмотря на широкое распространение метода ЗСН, далеко не все вопросы его практического применения решены удовлетворительным образом. Главной проблемой остается оценка корреляций между исследуемыми рядами или каталогами, без чего в большинстве случаев невозможно получить надежные (а иногда и просто разумные) оценки ошибок сравниваемых каталогов (рядов). Надо заметить, что при использовании этого метода нередко авторы пренебрегают этими корреляциями, что существенно ослабляет доверие к полученным результатам. Но в последнее время этому вопросу уделяется должное внимание, хотя задача еще очень далека от окончательного решения. В настоящей работе мы предлагаем новый подход к определению корреляций между каталогами, который может дополнить существующие методы.

### ЗСН метод

В исходной формулировке ЗСН метод применяется к трем сериям (рядам) измерений (в общем случае это могут быть и каталоги положений звезд или радиоисточников), сделанным в одни и те же моменты времени. Сначала для этих серий вычисляются серии попарных разностей для каждого момента (для каталогов – разности положений одних и тех же объектов). Эти измерения могут быть сделаны и не одновременно, а в близкие моменты, если изучаемые сигналы достаточно стабильны, т.е. их изменения за время, соответствующее разности эпох измерений, малы по сравнению с дисперсией сравниваемых данных. Затем для каждой серии разностей измерений вычисляется дисперсия. Если серии не коррелированы, справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\sigma_{12}^2 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2, \\ \sigma_{13}^2 &= \sigma_1^2 + \sigma_3^2, \\ \sigma_{23}^2 &= \sigma_2^2 + \sigma_3^2,\end{aligned}\tag{1}$$

где левые части представляют собой вычисленные дисперсии разностей серий измерений, а в правых частях стоят дисперсии исходных рядов, которые легко находятся из решения системы (1):

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 &= (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2) / 2, \\ \sigma_2^2 &= (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2) / 2, \\ \sigma_3^2 &= (\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 - \sigma_{12}^2) / 2.\end{aligned}\tag{2}$$

Для произвольного числа серий измерений  $M > 3$  система (1) состоит из  $M(M-1)/2$  уравнений вида

$$\sigma_{ij}^2 = \sigma_i^2 + \sigma_j^2,\tag{3}$$

и имеет следующее решение [2]:

$$\begin{aligned}\sigma_i^2 &= \frac{1}{M-2} \left( \sum_{j=1}^M \sigma_{ij}^2 - B \right), \\ B &= \frac{1}{2(M-1)} \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^M \sigma_{kj}^2, \\ \sigma_{ii}^2 &= 0, \quad \sigma_{ij}^2 = \sigma_{ji}^2.\end{aligned}\tag{4}$$

Однако эти простые формулы решают задачу только для случая некоррелированных сигналов, который представляется чисто теоретическим. На практике мы, как правило, имеем дело с коррелированными данными. Причины этого многообразны. В случае стандартов частоты корреляции чаще всего объясняются изменениями окружающей среды в помещении, где они находятся (обычно метод ЗСН применяется для часов одной службы времени). В случае каталогов координат радиоисточников, которые являются предметом настоящего исследования, корреляция результатов обусловлена, в первую очередь тем, что все центры анализа используют один и тот же набор наблюдений, а нередко также одно и то же программное обеспечение.

Пренебрежение корреляциями между сравниваемыми данными делает решения (2) или (4) статистически необоснованными. Более того на практике нередки случаи, когда дисперсии получаются отрицательными.

Для реальных (коррелированных) данных исходная система будет состоять из уравнений вида

$$\sigma_{ij}^2 = \sigma_i^2 + \sigma_j^2 - 2\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j.\tag{5}$$

В данном случае система является недоопределенной, т.е. содержит больше неизвестных, чем уравнений, и не имеет однозначного решения. В работе [3] предложен способ решения системы (5) в применении к определению нестабильности стандартов частоты для случая малых корреляций. Этот метод имеет и другие ограничения. Так он требует выделения одного стандарта как опорного, с которым сравниваются остальные. Кроме того, решение получается неоднозначным, а только позволяет выделить некоторый интервал возможных значений ковариационной матрицы, а значит и искомым дисперсий входных данных. Степень неопределенности уменьшается при увеличении числа сравниваемых стандартов. Дальнейшее развитие этот метод получил в работах [4,5], но с теми же ограничениями.

Прямой и более привлекательным методом решения задачи была бы оценка корреляций  $\rho_{ij}$  между сравниваемыми данными каким-либо независимым способом, что, собственно и является ключевой проблемой корректного применения метода ЗСН. Один из возможных подходов к вычислению такой оценки приводится ниже.

### **Применение к каталогам координат радиисточников**

Применение метода ЗСН к определению случайных ошибок каталогов радиисточников рассмотрено в ряде работ сотрудников ГАО НАНУ [6,7]. Авторы рассматривают несколько модификаций метода, но все они основаны на анализе разностей изучаемых каталогов с комбинированным (сводным) каталогом. Во всех случаях рассматривается сравнение трех каталогов. Кроме этого ограничения, результат вычислений очевидным образом зависит от метода построения сводного каталога, включая метод взвешивания исходных каталогов. От последнего зависит, насколько близок будет сводный каталог к тому или иному исходному, и, следовательно, этот фактор будет существенно влиять на вычисляемые корреляции.

Мы здесь рассматриваем дальнейшее развитие метода и предлагаем его модификацию, не требующую выделения какого-либо каталога как опорного и пригодную для произвольного числа каталогов, большего трех. Собственно говоря, точность вычисления повышается с увеличением числа используемых каталогов.

Вычисления по предлагаемому здесь методу производятся следующим образом. Сначала из всех каталогов выбираются общие источники. Дальнейшие вычисления производятся с этими редуцированными каталогами. Для определения корреляции между двумя каталогами  $i$  и  $j$  сначала вычисляются их разности для всех источников с каким-либо третьим каталогом сравнения  $k$ . Таким образом получаются наборы разностей  $\Delta_{ik}$  и  $\Delta_{jk}$ . Потом вычисляется корреляция между этими наборами  $Corr(\Delta_{ik}, \Delta_{jk})$ . Такая операция повторяется со всеми остальными каталогами, т.е. для  $k = 1, \dots, n, k \neq i, j$ , где  $n$  – число каталогов. Все разности по прямому восхождению умножаются на  $\cos \delta$ . Среднее значение  $Corr(\Delta_{ik}, \Delta_{jk})$  по всем  $k$  является искомой оценкой  $\rho_{ij}$ .

В этой работе мы использовали семь каталогов координат радиисточников, доступных в центре данных Международной службы РСДБ для геодезии и астрометрии IVS (<ftp://cddis.gsfc.nasa.gov/vlbi/ivsproducts/crf/>): aus008a, bkg001a, gsf008a, iaa008c, ma008a, ora008b, usn010b. Описания каталогов находятся там же.

Результаты вычислений приведены в табл. 1. Имена каталогов, соответствующих индексам  $i$  и  $j$ , приведены в первой колонке. Каталоги, соответствующие индексу  $k$  – в заголовке колонок со второй по предпоследнюю; в ячейках данных этих колонок приведены значения  $Corr(\Delta_{ik}, \Delta_{jk})$ . В последней колонке приведено их среднее значение (оценка  $\rho_{ij}$ ). Во всех ячейках с результатами вычислений верхняя строка относится к прямому восхождению, нижняя к склонению.

**Таблица 1.** Корреляции между каталогами.

Catalogs	AUS	BKG	GSF	IAA	MAO	OPA	USN	Mean
AUS BKG	—	—	0.0259 -0.0807	0.1870 0.1533	0.1199 0.0604	0.0057 -0.1081	0.0159 0.1137	0.0709 0.0277
AUS GSF	—	-0.1868 -0.2932	—	0.2932 0.3056	0.1493 0.1381	-0.0173 -0.1742	0.0302 0.1392	0.0537 0.0231
AUS IAA	—	-0.1723 -0.1807	-0.0909 0.0087	—	0.1013 0.0346	0.0414 -0.0723	0.0533 0.1498	-0.0134 -0.0120
AUS MAO	—	-0.1934 -0.2939	-0.1408 -0.1606	-0.3258 -0.3361	—	0.0470 0.0500	0.0709 0.2325	-0.1084 -0.1016
AUS OPA	—	-0.2004 -0.3461	-0.1317 -0.3034	-0.3114 -0.3820	-0.1720 -0.2157	—	0.0565 0.2801	-0.1518 -0.1934
AUS USN	—	-0.2059 -0.2208	-0.1595 -0.0670	-0.3318 -0.2261	-0.1929 -0.1303	-0.0722 0.0389	—	-0.1925 -0.1211
BKG GSF	0.8861 0.9473	—	—	0.6182 0.6901	0.7319 0.7355	0.2891 0.4078	0.5264 0.6137	0.6103 0.6789
BKG IAA	0.6918 0.8501	—	-0.2146 -0.2247	—	0.5439 0.5640	0.2419 0.3013	0.3826 0.6202	0.3291 0.4222
BKG MAO	0.9338 0.9182	—	-0.0243 -0.0233	-0.4356 -0.3848	—	0.0391 0.1063	0.3737 0.5263	0.1773 0.2285
BKG OPA	0.9553 0.9503	—	-0.0305 0.0832	-0.5838 -0.6311	-0.7074 -0.6825	—	0.5047 0.6572	0.0277 0.0754
BKG USN	0.9546 0.9278	—	-0.2769 0.0039	-0.5805 -0.4490	-0.7059 -0.5252	-0.3158 -0.0821	—	-0.1849 -0.0249
GSF IAA	0.8597 0.9131	0.5391 0.5375	—	—	0.5383 0.5779	0.1396 0.2329	0.4398 0.5475	0.5033 0.5618
GSF MAO	0.8623 0.9239	0.6230 0.6336	—	-0.7176 -0.6057	—	0.0242 0.1718	0.6252 0.5734	0.2834 0.3394
GSF OPA	0.8373 0.9452	0.9463 0.9414	—	-0.9694 -0.9484	-0.9470 -0.9336	—	0.9209 0.7672	0.1576 0.1544
GSF USN	0.8316 0.9255	0.6626 0.6911	—	-0.8019 -0.6795	-0.8209 -0.7137	-0.2426 -0.1620	—	-0.0742 0.0123
IAA MAO	0.6505 0.8170	0.4284 0.5258	0.1595 0.2652	—	—	0.1563 0.2925	0.4145 0.6425	0.3618 0.5086
IAA OPA	0.5894 0.7985	0.5490 0.5379	0.1041 0.0826	—	-0.5286 -0.5622	—	0.4546 0.6848	0.2337 0.3083
IAA USN	0.5863 0.7879	0.4369 0.4039	0.1708 0.0351	—	-0.5239 -0.4554	-0.1777 -0.0732	—	0.0985 0.1396
MAO OPA	0.9584 0.9535	0.6547 0.6377	0.2196 0.1491	0.7408 0.6094	—	—	0.6601 0.7115	0.6467 0.6122
MAO USN	0.9499 0.9236	0.3558 0.4239	-0.0876 -0.0393	0.5303 0.3668	—	0.1123 0.0297	—	0.3721 0.3409
OPA USN	0.9904 0.9679	0.6570 0.6950	0.1234 0.2910	0.7943 0.6641	0.8014 0.7044	—	—	0.6733 0.6645

Результаты, приведенные в таблице, содержат много данных для дальнейшего анализа. Приведем здесь только некоторые предварительные выводы:

- корреляции между каталогами для прямого восхождения и склонения близки между собой; это соответствует результатам других авторов [6, 7];
- различия между величинами  $Corr(\Delta_{ik}, \Delta_{jk})$ , вычисленными для разных  $k$ , в целом соответствуют среднеквадратической разности каталогов сравнения;
- в полученных результатах не просматривается явной зависимости корреляций от используемого программного обеспечения, чего можно было ожидать.

Что касается последнего пункта, каталоги BKG, GSF, OPA и USN получены с пакетом Calc/Solve, а три остальные каталога с разными другими пакетами.

### **Заключение**

Метод ЗСН, первоначально предложенный для исследования нестабильности стандартов частоты, позволяет, в принципе, при наличии нескольких стандартов определить дисперсию вариаций частоты каждого из них по дисперсиям разностей отсчетов между стандартами. Этот метод также применяется для определения случайных ошибок астрономических рядов измерений и каталогов положений звезд или радиоисточников. Однако реальные оценки шумовой составляющей отдельного стандарта (ряда, каталога), как правило, могут быть получены только при учете корреляций между исходными данными. Без этого получаемые оценки дисперсий нередко получаются нерелистичными, а нередко даже отрицательными.

В настоящей работе предложен новый метод оценивания корреляции между каталогами радиоисточников, применимый при большом числе сравниваемых каталогов. Корреляция между каждыми двумя каталогами радиоисточников находится как среднее значение между корреляциями разностей этих двух каталогов с каждым из остальных.

Зависимость результатов от числа каталогов не исследовалась, но из общих соображений корреляции между каталогами должны определяться тем точнее, чем больше каталогов используется. Этот вопрос еще нуждается в дополнительном исследовании. Другой важный вопрос, подлежащий исследованию, как влияют на результаты систематические разности между каталогами. Эти, как и прочие затронутые выше вопросы, предполагается изучить более детально на следующих этапах работы, в том числе с использованием разных наборов исходных каталогов, вычисляемых в различных центрах обработки РСДБ-наблюдений.

### **Литература**

1. Gray J.E., Allan D.W. A method for estimating the frequency stability of an individual oscillator. In: Proc. 28th Annual Symposium on Frequency Control, May 1974, 243–246.
2. Riley W.J. Handbook of Frequency Stability Analysis. National Institute of Standards and Technology, NIST Special Publication 1065, July 2008.
3. Tavella P., Premoli A. Estimating the instabilities of  $N$  clocks by measuring differences of their readings. Metrologia, 1994, V. 30, 479–486.
4. Torcaso F., Ekstrom C.R., Burt and E.A., Matsakis D.N., Estimating Frequency Stability and Cross-Correlations, In: Proc. 30th Annual Precise Time and Time Interval (PTTI) Systems and Applications Meeting, Reston, Virginia, 1998, 69–82.
5. Galindo F.J., Palacio J. Estimating the instabilities of  $N$  correlated clocks, 31st Annual Precise Time and Time Interval (PTTI) Meeting, USNO, Washington DC, 2000, 285–296.
6. Molotaj O.A., Tel'Nyuk-Adamchuk V.V., Yatskiv Ya.S. Celestial reference frame RSC (GAOUA) 98 C 01. Кинемат. физ. неб. тел., 1998, v. 14, 393–399.
7. Болотин С.Л., Литвин С.О. Сравнение сводных каталогов RSC (GAOUA) 05 C 03 и RSC (PUL) 06 C 02 с реализацией международной небесной системы отсчета ICRF. Кинемат. физ. неб. тел., 2010, v. 26, 31–42.

## ON ASSESSMENT OF THE STOCHASTIC ERRORS OF SOURCE POSITION CATALOGS

**Malkin Z. M.<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup>*Central Astronomical Observatory at Pulkovo of RAS, St. Petersburg, Russia*

<sup>2</sup>*Sobolev Astronomical Institute, St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia*

Correct estimate of the random errors of the catalogs is important for many tasks, such as catalog comparison, computation of the weights of the catalogs during combination, etc. Formal uncertainties of the source positions provided in the catalog are generally substantially smaller than the real position accuracy. Moreover, these uncertainties are computed using different methods, which makes it difficult to make a correct comparison of the catalogs. For this reason, astrometrists strive to develop and use more objective methods for the assessment of the catalog position errors. One of the widely used method for this task is the method called "N-cornered hat". It is based on the pair catalog comparison, for which we can write  $\sigma_{ij}^2 = \sigma_i^2 + \sigma_j^2 - 2\sigma_i\sigma_j r_{ij}$ , where  $\sigma_i$  и  $\sigma_j$  are the position errors in two catalogs,  $\sigma_{ij}$  is the error of the differences between source positions in two catalogs,  $r_{ij}$  – correlation coefficient between the position errors in two catalogs. Having three catalogs and three pairs of differences, one can solve the system of three equations to solve for  $\sigma_i$ . This method provides a theoretically correct result only in the case of uncorrelated errors ( $r_{ij}=0$ ), which is usually not the case in practice. Hence, we should have a possibility to estimate the correlations between catalogs. It is also important to generalize the method for arbitrary number of catalogs greater than 3. In this paper, one of possible approach to solve this task is considered.